

THE
MATRIX



Determinants

$$V \quad \dim V = d$$

$\text{Alt}^{(d)}(V; K)$ est de dimension 1

et donc admet une base formée

d'un seul elt $\neq 0$ le déterminant

DÉFINITION 10.3. Soit V un K -EV de dimension d et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V .
La forme alternee definie par

$$\det_{\mathcal{B}} = \Delta_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(1)}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(d)}^*$$

est appelee determinant de V dans la base $\mathcal{B}$.

La forme $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme multilineaire alternee Λ verifiant

$$(10.2.1) \quad \Lambda(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d) = 1.$$

C'est une base de $\text{Alt}^{(d)}(V, K)$ et pour $\Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V, K)$ on a

$$(10.2.2) \quad \Lambda = \Lambda(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d) \det_{\mathcal{B}}.$$

Si on prend $V = K^d$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_d^0$ la base canonique on note simplement $\Delta_d = \det_d$. Ainsi si $v_i = (x_{ij})_{j \leq d}$

$$\det_d(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{d\sigma(d)}.$$

THÉORÈME 10.7 (Formules combinatoire pour le determinant). *Soient $v_1, \dots, v_d$ des vecteurs et $(x_{ij})_{j \leq d}$ leurs coordonnees dans la base $\mathcal{B}$:*

$$v_i = \sum_{j=1}^d x_{ij} \mathbf{e}_j.$$

On a les formules suivantes

$$(10.2.3) \quad \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^d x_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{d\sigma(d)}.$$

$$(10.2.4) \quad \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_d) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^d x_{\sigma(j)j} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(d)d}.$$

Determinant d'un endomorphisme

$$\varphi: V \longrightarrow V, \Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V; K)$$

$$\varphi^* \Lambda: (v_1, \dots, v_d) \longmapsto \Lambda(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_d))$$

$$\varphi^* \Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V; K)$$

$$\varphi^* \Lambda = \det(\varphi) \cdot \Lambda \quad \det(\varphi) \in K$$

DÉFINITION 10.4. *Le déterminant de φ , $\det \varphi \in K$ est le scalaire vérifiant pour tout $\Lambda \in \text{Alt}^{(d)}(V; K)$*

$$(10.2.5) \quad \varphi^*(\Lambda) = \det(\varphi)\Lambda.$$

En particulier $\det(\varphi)$ ne dépend pas du choix d'une base de V et pour toute base $\mathcal{B} \subset V$ on a

$$\varphi^*(\det_{\mathcal{B}}) = \det(\varphi)\det_{\mathcal{B}}.$$

THÉORÈME 10.8 (Propriétés fonctionnelles du déterminant). Soit $\varphi : V \mapsto V$ un endomorphisme. L'application $\det : \text{End}(V) \mapsto K$ a les propriétés suivantes

(1) Homogénéité: soit $\lambda \in K$ alors

$$\det(\lambda.\varphi) = \lambda^d . \det(\varphi).$$

(2) Multiplicativité: on a

$$\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi) \det(\varphi) = \det(\varphi) \det(\psi) = \det(\varphi \circ \psi).$$

(3) Critère d'inversibilité: on a

$$\det(\varphi) \neq 0 \iff \varphi \in \text{GL}(V).$$

(4) Invariance par conjugaison: pour tout $\varphi \in \text{End}(V)$ et $\psi \in \text{GL}(V)$ on a

$$\det(\text{Ad}(\psi)(\varphi)) = \det(\psi\varphi\psi^{-1}) = \det(\varphi).$$

(5) Morphisme: L'application

$$\det : \text{GL}(V) \mapsto K^\times$$

est un morphisme de groupes. En particulier $\det(\text{Id}_V) = 1$.

DÉFINITION 10.5. Le noyau du morphisme $\det : \text{GL}(V) \mapsto K^\times$ est appelé "groupe spécial linéaire de V " et on le note

$$\text{SL}(V) = \ker \det = \{\varphi \in \text{GL}(V), \det \varphi = 1\}.$$

C'est un sous-groupe distingué de $\text{GL}(V)$ (car c'est un noyau).

Determinant d'une matrice

DÉFINITION 10.6. Soit $M \in M_d(K)$ une matrice carrée de coefficients $M = (m_{ij})_{ij \leq d}$. Le déterminant $\det(M)$ de M est (de manière équivalente):

(1) Le scalaire

$$\det M = \det(\varphi_M)$$

ou $\varphi_M : K^d \mapsto K^d$ est l'application linéaire sur K^d dont la matrice dans la base canonique

$$\text{mat}_{\mathcal{B}^0}(\varphi_M) = M.$$

(2) Le déterminant – relatif à la base canonique $\mathcal{B}_{\text{Col}_d}^0$ de l'espace vectoriel $\text{Col}_d(K)$ des vecteurs colonnes de hauteur d – de l'ensemble des vecteurs colonnes de e la matrice M :

$$\det(M) = \det_{\mathcal{B}_{\text{Col}_d}^0}(\text{Col}_1(M), \dots, \text{Col}_d(M))$$

(3) Le déterminant – relatif à la base canonique $\mathcal{B}_{\text{Lig}_d}^0$ de l'espace vectoriel $\text{Lig}_d(K)$ des vecteurs lignes de longueur d – des vecteurs lignes de la matrice M dans l'espace des vecteurs lignes $\text{Lig}_d(K)$:

$$\det(M) = \det_{\mathcal{B}_{\text{Lig}_d}^0}(\text{Lig}_1(M), \dots, \text{Lig}_d(M))$$

(4) La somme

$$(10.2.4) \quad \det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) m_{\sigma(1)1} \cdots m_{\sigma(d)d}.$$

(5) La somme

$$(10.2.5) \quad \det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)} \cdots m_{d\sigma(d)}.$$

Rmq : $\varphi : V \rightarrow V \quad B \subset V \quad N = \text{mat}_B \varphi$

$$\det(\text{mat}_B \varphi) = \det(\varphi)$$

Example $d=2$ $G_2 = \{Id_2, (1,2)\}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \sum_{G \in G_2} \text{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)}$$

$$= m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}$$

$$= ad - bc.$$

$$d=3 \quad G_3 = \{I_3, (12), (23), (31), (123), (132)\}$$

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in G_3} \text{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} m_{3\sigma(3)}$$

$$= m_{11} m_{22} m_{33} - m_{12} m_{21} m_{33} - m_{11} m_{23} m_{32}$$

$$- m_{13} m_{22} m_{31} + m_{12} m_{23} m_{31} + m_{13} m_{21} m_{32}$$

Regle de Sarrus

$$\det(M) = m_{11}m_{22}m_{33} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{11}m_{23}m_{31} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32}.$$

$$\det(M) = m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{11}m_{23}m_{31}.$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 10.9 (Propriétés fonctionnelles du déterminant des matrices). *Le déterminant d'une matrice a les propriétés suivantes*

(1) *Homogénéité: soit $\lambda \in K$ alors*

$$\det(\lambda.M) = \lambda^d \cdot \det(M).$$

(2) *Invariance par transposition:*

$$\det(M) = \det({}^t M).$$

(3) *Multiplicativité: on a*

$$\det(M.N) = \det(M) \det(N) = \det(N) \det(M) = \det(N.M).$$

(4) *Critère d'inversibilité: on a*

$$\det(M) \neq 0 \iff M \in \mathrm{GL}_d(K).$$

(5) *Invariance par conjugaison: pour $C \in \mathrm{GL}_d(K)$*

$$\det(\mathrm{Ad}(C)M) = \det(CMC^{-1}) = \det(M).$$

(6) *Morphisme: L'application*

$$\det : \mathrm{GL}_d(K) \mapsto K^\times$$

est un morphisme de groupes. En particulier $\det(\mathrm{Id}_d) = 1$.

COROLLAIRE 10.2. Soient M et N deux matrices semblables (ie. conjuguées): il existe $P \in \text{GL}_d(K)$ tel que

$$N = P.M.P^{-1}.$$

Alors

$$\det(M) = \det(N).$$

Le déterminant ne dépend que de la classe de conjugaison (d'une matrice ou d'un endomorphisme).

COROLLAIRE 10.3. (Invariance du déterminant par dualité) Soit $\varphi \in \text{End}(V)$ et $\varphi^* \in \text{End}(V^*)$ l'application linéaire duale. On

$$\det \varphi^* = \det \varphi.$$

Calculs de Determinants

THÉORÈME 10.10 (Determinant des matrices par blocs). Supposons que la matrice $M \in M_d(K)$ s'écrit sous forme triangulaire supérieure par blocs:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 \in M_{d_1}(K), \quad M_2 \in M_{d_2}(K), \quad d_1 + d_2 = d$$

alors

$$\det(M) = \det(M_1) \det(M_2)$$

Preuve:

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_d} \text{sign}(\sigma) m_{\sigma(1)1} m_{\sigma(2)2} \dots m_{\sigma(d)d}$$

la somme ne porte que sur les σ tq
 pour $j \leq d_1$, $\sigma(j) \leq d_1$ (si $\sigma(j) > d_1$ alors $m_{\sigma(j)j} = 0$ pour $j \leq d_1$)

Ces σ (appelons $\mathcal{G}_{d_1 \leq d_2}$ le ensemble)
 sont des permutation tq si $j \leq d_1$, $\sigma(j) \leq d_1$
 qui permutent $\{1, \dots, d_1\}$ et du coup
 elle permutent le complémentaire $\{d_1+1, \dots, d_1+d_2\}$
 σ induisent de permutation des ensembles
 disjoints

$$\{1, \dots, d_1\} \cup \{d_1+1, \dots, d_1+d_2\}$$

$$\sigma \in \mathcal{S}_{d_1+d_2} \xrightarrow{\quad} (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{S}_{d_1} \times \mathcal{S}_{d_2}$$

$\mathcal{S}_{d_1+d_2}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_d$ et l'application

est un isomorphisme de grps.

$$\mathcal{S}_{d_1+d_2} \cong \mathcal{S}_{d_2}$$

$$\text{et } \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma_1) \text{sign}(\sigma_2)$$

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{d_1 \times d_1}} \text{sign}(\sigma) m_{\sigma(1)1} m_{\sigma(2)2}$$

$$\dots m_{\sigma(d_1)d_1} \times m_{\sigma(d_1+1)d_1+1} \dots$$

$$\times m_{\sigma(d_1+d_2)d_1+d_2}$$

$$= \sum_{\sigma_1 \in \mathcal{S}_{d_1}} \sum_{\sigma_2 \in \mathcal{S}_{d_2}} \text{sign}(\sigma_1) \text{sign}(\sigma_2) \times$$

$$\prod_{j=1}^{d_1} \sigma_1(j) j \times \prod_{j'=1}^{d_2} \sigma_2(j') + d_1, j' + d_1$$

$$= \left(\sum_{\sigma_1} \text{sign}(\sigma_1) \prod_{j=1}^{d_1} \sigma_1(j) j \right) \left(\sum_{\sigma_2} \text{sign}(\sigma_2) \prod_{j'=1}^{d_2} \sigma_2(j') + d_1, j' + d_1 \right)$$

$$= \det M_1 \times \det M_2 \quad \square$$

COROLLAIRE 10.4. *soit $k \geq 2$ un entier, si M est une matrice triangulaire superieure a k blocs*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * & * \\ \mathbf{0} & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_k \end{pmatrix}, \quad M_i \in M_{d_i}(K), \quad i \leq k, \quad d_1 + \cdots + d_k = d$$

on a

$$\det M = \det(M_1) \cdots \det(M_k).$$

En particulier, si M est triangulaire superieure ($k = d$) –par exemple diagonale–

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix},$$

on a

$$\det M = \lambda_1 \cdots \lambda_d.$$

THÉORÈME 10.11. Supposons que la matrice $M \in M_d(K)$ s'écrive sous forme triangulaire inférieure par blocs:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ * & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 \in M_{d_1}(K), \quad M_2 \in M_{d_2}(K), \quad d_1 + d_2 = d.$$

alors

$$\det(M) = \det(M_1) \det(M_2).$$

Soit $k \geq 2$ un entier, si M est une matrice triangulaire inférieure à k blocs

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \ddots & \mathbf{0} \\ * & * & M_k \end{pmatrix}, \quad M_i \in M_{d_i}(K), \quad i \leq k, \quad d_1 + \dots + d_k = d$$

on a

$$\det M = \det(M_1) \cdots \det(M_k).$$

Preuve:

Quand rencontre-t-on des matrices Blocs

Soit $\varphi: V \rightarrow V$ on suppose que

$$V = V_1 \oplus V_2 \text{ et que}$$

$\varphi(V_1) \subset V_1$. alors si la base de V

est $B = B_1 \cup B_2$ avec B_1 base de V_1
 B_2 base de V_2

alors

$$\text{mat}_{B_1 \cup B_2}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & \text{diagonal lines} \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} M_1 & \text{diagonal lines} \\ \hline 0 & M_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} d_1 = \dim V_1 \\ d_2 = \dim V_2 \end{array}$$

si $\{e_1, \dots, e_{d_1}\} = B_1$

$\varphi(e_i)$ est cl de $\{e_1, \dots, e_{d_1}\}$

et n'aura pas de composante
suivant les elts de B_2

Calcul par reduction

LEMME 10.3. Soient T_{ij} , $D_{i,\lambda}$, $CL_{ij,\mu}$ les matrices associées aux transformations élémentaires sur les lignes d'une matrice. On a

$$\det T_{ij} = -1 \text{ (si } i \neq j)$$

$$\det D_{i,\lambda} = \lambda$$

$$\det CL_{ij,\mu} = 1, \text{ (si } i \neq j).$$

Preuve T_{ij} soit $M \in M_d(K)$ $i < j$

$T_{ij} M$ est la matrice $M^{(ij)}$ issue de M avec la i -ième et la j -ième ligne échangée

$$\det(T_{ij} M) = \det T_{ij} \det M = \det M^{(ij)}$$

$$\det M^{(ij)} = \det (L_1^{(ij)}, L_2^{(ij)}, \dots, L_d^{(ij)})$$

$$= \det (L_1, \dots, \overbrace{L_j, \dots, L_i}^{i < j}, \dots, L_d)$$

$$= -\det (L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_d)$$

$$= -\det M$$

(on utilise la définition de $\det M$ comme
 $\det$ des d lignes qui composent M)

$$\det T_{ij} \det M = - \det M$$

$$\det T_{ij} = -1.$$

- $C_{ij, \lambda}$ c'est une matrice triangulaire
sup ou inférieure (suivant que
 $i < j$ ou $i > j$)

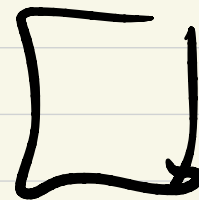
avec des 1s sur la diagonale

$$\det C_{ij, \lambda} = \prod_{i=1}^d 1 = 1$$

$D_{i,\lambda}$ est diagonale avec des 1 partout
(sur la diagonale) sauf en (i,i)

ou on a. 1

$$\det D_{i,\lambda} = (1)^{d-1} \times 1 = 1$$



On peut utiliser ce résultat pour calculer $\det M$ en transformant M en une forme échelonnée.

- si le nb d'échelon est $< d$ M n'est pas inversible et $\det M = 0$
- si le nb d'échelons est d

$$E = T_1 \dots T_l T_1 M$$

E = triangulaire sup (et son $\det E$ est facile à calculer) et

$$\det E = \prod_{i=1}^l \det T_i \times \det M$$

le mieux c'est de ne pas faire de dilatation

Examples:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18$$

Développement de Lagrange

THÉORÈME 10.12 (Developpement de Lagrange le long d'une colonne). On a pour tout $j \leq d$

$$\det M = \sum_{i=1}^d m_{ij} (-1)^{i+j} \det(M(i|j)).$$

$d-1$

THÉORÈME 10.13 (Developpement de Lagrange le long d'une ligne). On a pour tout $i \leq d$

$$\det M = \sum_{j=1}^d m_{ij} (-1)^{i+j} \det(M(i|j)).$$

$M(i|j)$ est la matrice $d-1 \times d-1$
obtenue à partir de M en ôtant
la i -ième ligne et la j -ième colonne.

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Preuve (pour la 1^{re} colonne)

soient $v_1, \dots, v_d \in K^d$ les vecteurs
correspondant aux d colonnes de M

$$v_k = m_{1k}e_1 + m_{2k}e_2 + \dots + m_{dk}e_d$$

$$\det M = \det_B(v_1, \dots, v_d) \quad B = \{e_1, \dots, e_d\}$$

$$d=1$$

$$v_1 = m_{11}e_1 + \dots + m_{d1}e_d$$

$$\det(v_1, \dots, v_d) = \sum_{i=1}^d m_{i1} \det(e_i, v_2, \dots, v_d)$$

$$v_2 = m_{12}e_1 + m_{22}e_2 + \dots + m_{d2}e_d$$

$$v_2 = m_{12}e_1 + v_2^{(1)} \quad v_3 = m_{13}e_1 + v_3^{(1)}$$

pour $i = 1, \dots, d$

$$v_k^{(i)} = \sum_{\substack{d=1 \\ d \neq i}}^d m_{dk} e_d$$

$$\det(e_i, v_2, \dots, v_d) = \det(e_i, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, \dots, v_d^{(i)})$$

la fonction $(v_2^{(i)}, \dots, v_d^{(i)}) \mapsto \det(e_i, v_2^{(i)}, \dots, v_d^{(i)})$

est une FMA en $d-1$ variable

sur le K -ev $V^{(i)} = \ker(e_i, \hat{e}_i, \dots, e_d)$

$$V^{(i)} = \{v \in V \mid e_i^*(v) = 0\}$$

$$\det(e_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \dots, v_d^{(i)}) = \lambda \det_{B^{(i)}}(v_2^{(i)}, \dots, v_d^{(i)})$$

$$B^{(i)} = \{e_1, \dots, e_{i-1}, \widehat{e_i}, e_{i+1}, \dots, e_d\}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda &= \det_{B^{(i)}}(e_i, e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d) \\ &= (-1)^{i-1} \det_B(e_1, \dots, e_d) = (-1)^{i-1} \end{aligned}$$

$$\det M = \det(v_1, \dots, v_d) = \sum_{i=1}^d m_{i,1} (-1)^{i+1} \det_{B_{(i)}}(v_2^{(i)}, \dots, v_d^{(i)})$$

$$= \sum_{i=1}^d m_{i,1} (-1)^{i+1} \det M(i,1)$$

Formule de Lagrange pour la 1^{ère} Colonne
 $j=1$

Formule de Lagrange pour j quelconque

On note M' la matrice issue de

M alors avoir échangé la 1^{ère} et la j ième colonne: on obtient la formule énoncée à partir du dev de Lagrange de $\det M'$ par rapport à la 1^{ère} colonne: ça introduit le signe $(-1)^j$ dans la somme.



Formules de Cramer

DÉFINITION 10.9. Pour $k, l \leq d$

- le déterminant $\det(M(k|l))$ est appelé le (k, l) mineur de M .
- le déterminant avec signe, $(-1)^{k+l} \det(M(k|l))$ est appelé le (k, l) cofacteur de M .
- La matrice des cofacteurs de M , est la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de M :

$$\text{cof}(M) = (\tilde{m}_{ij})_{\substack{i \leq d \\ j \leq d}}, \quad \tilde{m}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M(i|j))$$

THÉORÈME 10.14 (Formule de Cramer). Soit $M \in M_d(K)$ et $\text{cof}(M)$ sa matrice des cofacteurs. On a

$$M \cdot {}^t \text{cof}(M) = {}^t \text{cof}(M) \cdot M = \det(M) \cdot \text{Id}_d.$$

En particulier si $\det M \neq 0$, alors M est inversible et son inverse est donnée par

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{cof}(M).$$

$d=2$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{cof } M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad {}^t \text{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Preuve $M = (m_{ij})_{i,j \leq d}$

$$M' = {}^t \text{cof}(M) = m'_{ij}$$

$$m'_{ji} = (-1)^{i+j} \det M(i|j)$$

le développement de Lagrange le
long d'une colonne j dit exactement

$$\sum_{i=1}^d m'_{ji} m_{ij} = \det M$$

→ la composante (j, j) de la matrice
produit $M'M$ et $\det M$

Pour conclure il suffit de montrer
les autres composantes (k, j) avec
 $k \neq j$ sont nulles

on veut $m_{kj} \quad \forall k \neq j$

$$\sum_{i=1}^d m'_{ki} m_{ij} = 0$$

$$= \sum_{i=1}^d m_{ij} (-1)^{i+k} \det M(i|k)$$

Soit $M^{(d,k)}$ la matrice dont les
colonnes sont celles de M

seul la k -ième colonne qu'on remet
égal à la j -ième colonne de M

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_d & c_k & c_q \end{pmatrix} \quad M^{(k)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_d & c_j & c_q \end{pmatrix}$$

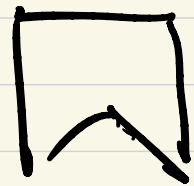
$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ d & k \end{matrix}$

 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ j & k \end{matrix}$

$$\det M^{(j,k)} = \det(c_1 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{c_d} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{c_d} \dots c_d) \\ = 0$$

en développant ce déterminant
par rapport à la k -ième colonne
on obtient

$$\sum_{c=1}^d m_{ij}(-1)^{i+k} \det M(i|k) = 0$$



Applications de Cramer

Algebrique : si $A \subset K$ est un sousanneau
de K (par exemple $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$)

et $M \in M_d(A)$ alors

$\det M \in A$ et ${}^t \text{cof}(M) \in M_d(A)$

et si $\det M \in A - \{0\}$ $M^{-1} \in \frac{1}{\det M} M_d(A)$

en particulier si $\det M \in A^\times$
(is $A = \mathbb{Z}$ $\det M \in \{\pm 1\}$) alors

$$M^{-1} \in M_d(A)$$

$$\overset{''}{(\det A)^{-1} \text{cof}(A)} \in M_d(A).$$

Analyse: $M_d(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{d^2}$ est un espace topologique (muni de la topologie produit de $\mathbb{R}$)

— $M \longrightarrow \det M$ est un polynôme en les coordonnées de M et est donc continue

— $M \longrightarrow {}^t \text{cof}(M) \in M_d(\mathbb{R})$ est une fct continue sur $M_d(\mathbb{R})$

~~=~~ sur $GL_d(\mathbb{R}) = \{M \text{ tq } \det M \neq 0\}$

Comme $\det(\cdot)$ est une fct continue

$GL_d(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_d(\mathbb{R})$

sur $GL_d(\mathbb{R})$ la fct

$M \mapsto M^{-1}$ est continue

For $d=1$ $M_d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow x^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

is continue.

Polynome Caractéristique

Anneau des Polynômes

$K = \text{Corps}$ (Car $K \neq 2$)

$$K[X] = \left\{ a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d \mid a_0, a_1, \dots, a_d \in K, d \geq 0 \right\}$$

l'anneau des polynôme a coefs ds K
en tant qu'ensemble on définit $K[X]$ comme
l'ensemble des suites

$(a_n)_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$ "à support fini"

: étant donné $(a_n)_{n \geq 0}$ il existe $d \geq 0$ tq
si $n > d$ $a_n = 0$

On note $1 = X^0 := (1, \bar{0})$ $X_1 := (0, 1, \bar{0})$

$X^2 := (0, 0, 1, \bar{0})$ $X^k := (0, \underset{\uparrow}{0}, 1, \bar{0})$

$K_f^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à support fini k

est un ss K-ev de $K^{\mathbb{N}}$

Dont une base est la base des monômes

$$B^0 = \{ X^0 = 1, X^1 = X, X^2, \dots, X^k, \dots \}$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_d, \overline{0}) = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \dots + a_n X^n$$



si $K = \mathbb{F}_p$ le polynome
 $X^p - X$ est la fonction sur $\mathbb{F}_p$

$\mathbb{F}_p^*$ est fini de cardinal $p-1$

$$\forall x \neq 0 \quad x^{p-1} = 1_{\mathbb{F}}$$

$$\forall x \in \mathbb{F}_p \quad x^p = x \quad \text{ie } \forall x \in \mathbb{F}_p \quad x^p - x = 0$$

$K[X]$ est un anneau commutatif et une K -Algèbre

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$$

$$Q(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_d X^d$$

$$PQ(X) := c_0 + c_1 X + \dots + c_{2d} X^{2d}$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

$M \in M_d(K)$ son polynôme caractéristique

c'est le polynôme

$$P_{\text{car}, M}(X) := \det(X \cdot I_d - M)$$

$$X I_d - M \in M_d(K[X])$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1d} \\ m_{d1} & m_{d2} & m_{dd} \end{pmatrix}$$

$$XI_d - M = \begin{pmatrix} X - m_{11} & -m_{12} & -m_{1d} \\ & X - m_{22} & \\ -m_{d1} & -m_{d2} & X - m_{dd} \end{pmatrix} \in M_d(K[x])$$

$$P_{\text{car}, M}(X) = \sum_{\sigma \in G_d} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^d (X - m_{i, \sigma(i)})$$

les coefs de $X \underline{I}_d - M$ sont les

$$(X \delta_{i=j} - m_{ij})_{i, j \leq d} \in M_d(K(X))$$

Si on veut faire de l'AL pour le
Pol car de M on considère

le corps des fraction rationnelle

$$K(X) = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\}$$

Ce corp contient K comme corps

K et identifie au Poly de d^0

THÉORÈME 11.1. *Le polynome caractéristique est un polynome unitaire de degré d et si on écrit*

$$\det(X.\text{Id}_d - M) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$$

On a

$$a_0 = P(0) = (-1)^d \det M,$$

$$a_{d-1} = -\text{tr}(M) = -(m_{11} + \cdots + m_{dd})$$

est la trace de la matrice M .

Preuve :

$$P_{\text{car}, M}(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_d} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^d (X - m_{i, \sigma(i)})$$

$\deg P_{\text{car}, M} \leq d$. et il y a un seul terme
de d° d : $\sigma = \text{Id}_d$ et le coef dominant
 $= \text{sign}(\text{Id}_d) \times 1^d = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(0) = a_0 &= \det(0I_d - M) \\ &= \det(-M) = (-1)^d \det M \end{aligned}$$

le coef de $d^0 d^{-1}$ est le coef de la contribution de $\sigma = I_d$

$$1 \times \prod_{i=1}^d (X - m_{ii}) = X^d + (-m_{11} - m_{22} - \dots - m_{dd}) X^{d-1} + a_{d-2} X^{d-2} + \dots$$



DÉFINITION 11.1. Le polynôme caractéristique de M est le déterminant

$$P_{car,M}(X) = \det(X \cdot \text{Id}_d - M) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^d (X \delta_{i\sigma(i)} - m_{i\sigma(i)}) \in K[X]$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M \quad \text{Pol}_{car,M}(X) &= \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} \\ &= X^2 - (-1) = X^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{Pol}_{car,M}(X) &= \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc \\ &= X^2 - (a+d)X + ad - bc \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & d \\ -1 & X & 0 & c \\ 0 & -1 & X & b \\ 0 & 0 & -1 & X+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & d \\ 0 & X & 0 & c + \frac{d}{X} \\ 0 & -1 & X & b \\ 0 & 0 & -1 & X+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & d \\ 0 & X & 0 & c + \frac{d}{X} \\ 0 & 0 & X & b + \frac{c}{X} + \frac{d}{X^2} \\ 0 & 0 & -1 & X+a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & d \\ 0 & X & 0 & c + \frac{d}{X} \\ 0 & 0 & X & b + \frac{c}{X} + \frac{d}{X^2} \\ 0 & 0 & 0 & X+a + \frac{1}{X}(b + \frac{c}{X} + \frac{d}{X^2}) \end{vmatrix} = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

Matrice Compagnone

$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \dots + b_0;$$

$$M_P = M_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$

$$\det(XI_d - M_p) = P(X)$$

PROPOSITION 11.1. *Soit*

$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \in K[X]$$

un polynome et M_P la matrice compagnon associée au polynome P . Alors son polynome caractéristique est égal à P :

$$P_{car, M_P}(X) = \det(X \cdot \text{Id}_d - M_P) = P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0.$$

THÉORÈME 11.2 (Propriétés fonctionnelles du polynôme caractéristique). Soient M, N des matrices, on a

$$P_{car, {}^tM}(X) = P_{car, M}(X)$$

et

$$P_{car, MN}(X) = P_{car, NM}(X).$$

Ainsi pour tout $k \leq d$

$$a_k(M.N) = a_k(N.M)$$

et en particulier

$$\text{tr}(M.N) = \text{tr}(N.M).$$

Preuve:
$$\begin{aligned} \text{Pol}_{car, {}^tM}(X) &= \det(X \cdot \text{Id}_d - {}^tM) \\ &= \det({}^t(X \text{Id}_d - {}^tM)) \\ &= \det(X {}^t\text{Id}_d - M) \\ &= \det(X \text{Id}_d - M) = \text{Pol}_{car, M} \end{aligned}$$

$$\text{Pol}_{\text{Car}}(X\text{Id} - MN) \stackrel{?}{=} \text{Pol}_{\text{Car}}(X\text{Id} - NM)$$

On le fait en supposant M inversible.

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{\text{Car}}(X\text{Id} - MN) &= \det(XMM^{-1} - MN) \\ &= \det(M(XM^{-1} - N)) = \det(M)\det(XM^{-1} - N) \\ &= \det((XM^{-1} - N)M) = \det(X\text{Id}_d - NM) \end{aligned}$$

si M n'est pas inversible on a recours
à une astuce:

on travaille dans le $K \leftrightarrow K(T)$

$$M + T \cdot I_d \in M_d(K(T))$$

$M_T = M + T I_d$ est inversible ds $M_d(K(T))$

car son det est un poly en T de $d^{\circ} d$

On a donc

$$\text{Pol}_{\text{Car}, M_T N}(X) = \text{Pol}_{\text{Car}, NM_T}(X) \in K(T)[X]$$

$$\det(XI_d - (M + TI_d)N) = \det(XI_d - N(M + TI_d))$$

égalité de deux polynômes en T

si on prend $T=0$ dans cette identité

$$M_{T=0} = M \text{ et on a}$$

$$\text{Pol}_{\text{Car}, MN} = \text{Pol}_{\text{Car}, NM}.$$



THÉORÈME 11.3 (Invariance par conjugaison). *Le polynôme caractéristique est un invariant de la classe de conjugaison de la matrice M : pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_d(K)$, on a*

$$P_{\text{car}, P.M.P^{-1}}(X) = P_{\text{car}, M}(X).$$

COROLLAIRE 11.1. *Soient $(a_k(M))_{0 \leq k \leq d}$ les coefficients de $P_{\text{car}, M}(X)$:*

$$\det(X.\text{Id}_d - M) = X^d + a_{d-1}(M)X^{d-1} + \cdots + a_d(M)$$

(on a $a_d(M) = 1$).

Ces coefficients sont des invariants de la classe de conjugaison de M .

Autrement dit, pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_d(K)$ et $0 \leq k \leq d$

$$a_k(M) = a_k(P.M.P^{-1}).$$

Preuve:
$$\begin{aligned} \text{Pol}_{\text{Car}, PMP^{-1}}(X) &= \text{Pol}_{\text{Car}, P^{-1}PM}(X) \\ &= \text{Pol}_{\text{Car}, \text{Id}_d M}(X) \\ &= \text{Pol}_{\text{Car}, M}(X) \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION 11.2. Supposons que la matrice $M \in M_d(K)$ s'ecrive sous forme triangulaire superieure par blocs:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 \in M_{d_1}(K), \quad M_2 \in M_{d_2}(K), \quad d_1 + d_2 = d$$

alors

$$P_{car,M}(X) = P_{car,M_1}(X)P_{car,M_2}(X)$$

Preuve: Preuve: □

Preuve: $\det(XI_d - M)$

$$XI_d - M = \begin{pmatrix} XI_{d_1} - M_1 & \text{---} \\ \mathbf{0} & XI_{d_2} - M_2 \end{pmatrix}$$

est une matrice blocs et son det est

le produit des déterminants des blocs

$$\det(XI_{d_1} - M_1) \det(XI_{d_2} - M_2)$$



COROLLAIRE 11.2. *soit $k \geq 2$ un entier, si M est une matrice triangulaire superieure a k blocs*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * & * \\ \mathbf{0} & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_k \end{pmatrix}, \quad M_i \in M_{d_i}(K), \quad i \leq k, \quad d_1 + \cdots + d_k = d$$

on a

$$P_{car,M}(X) = P_{car,M_1}(X) \cdots P_{car,M_k}(X)$$

En particulier, si M est triangulaire superieure ($k = d$) –par exemple diagonale–

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix},$$

on a

$$P_{car,M}(X) = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i).$$

Polynôme caractéristique
d'un endomorphisme

$$\dim V = d \quad \varphi: V \rightarrow V$$

DÉFINITION 11.2. Soit $\varphi \in \text{End}(V)$ une application linéaire, on définit son polynôme caractéristique par

$$P_{\text{car}, \varphi}(X) = P_{\text{car}, M}(X)$$

ou $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est la matrice de φ dans une base quelconque de V .

Rmq: C'est bien défini: si B' est une autre base de V et $M' = \text{mat}_{B'}(\varphi)$

alors
$$M' = \text{mat}_{BB'}^{-1} M \text{mat}_{BB'}$$

$$\Rightarrow P_{\text{car}, M'}(X) = P_{\text{car}, M}(X)$$

DÉFINITION 11.3. On définit la trace de φ comme étant la trace de M

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(M) = m_{11} + \cdots + m_{dd}$$

et cette définition ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

PROPOSITION 11.3. Le polynôme caractéristique $P_{\mathrm{car},\varphi}(X)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de φ dans $\mathrm{End}(V)$: pour tout $\psi \in \mathrm{GL}(V)$

$$P_{\mathrm{car},\psi.\varphi.\psi^{-1}}(X) = P_{\mathrm{car},\varphi}(X).$$

Sous-espaces Propres

THÉORÈME 11.4. Soit $P_{\text{car},\varphi}$ le polynôme caractéristique d'une application linéaire φ .
Les énoncés suivants sont équivalents

- (1) Le scalaire $\lambda \in K$ est racine de $P_{\text{car},\varphi}$: $P_{\text{car},\varphi}(\lambda) = 0$.
- (2) Il existe $v \in V - \{0\}$ tel que $\varphi(v) = \lambda.v$

Preuve: Soit λ tq $P_{\text{car},\varphi}(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \det(\lambda \text{Id} - \varphi) = 0$ $\lambda \text{Id} - \varphi$ n'est pas inversible

~~car~~ $\ker(\lambda \text{Id} - \varphi) \neq \{0\}$ il existe $v \in V - \{0\}$

tq $(\lambda \text{Id} - \varphi)(v) = 0_v = \lambda v - \varphi(v)$

Réciproquement soit $\lambda \in K$ et $v \in V - \{0\}$

tel que $\varphi(v) = \lambda.v$ alors

$$v \in \ker(\lambda \text{Id} - \varphi) \Rightarrow$$

$\lambda \text{Id} - \varphi$ n'est pas inversible

$$\det(\lambda \text{Id} - \varphi) = 0 = P_{\varphi, \varphi}(\lambda)$$



DÉFINITION 11.4. Soit $\lambda \in K$, le sous-espace

$$V_{\varphi, \lambda} := \ker(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V) = \{v \in V, \varphi(v) = \lambda \cdot v\}$$

est appelée sous-espace propre associé à λ . Si $V_{\varphi, \lambda} \neq \{0_V\}$ on dit que λ est une valeur propre de φ et tout vecteur non-nul de $V_{\varphi, \lambda}$ (ie. vérifiant $\varphi(v) = \lambda \cdot v$) est appelé vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propres de φ est appelé le spectre de φ (dans K) et est noté

$$\text{Spec}_{\varphi}(K).$$

Thm de Cayley-Hamilton

$A = K$ -algebra (eg. $A = M_d(K), \text{End}(V)$)

$\varphi \in A$ et $P(X) = a_0 X^0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$

on définit l'évaluation de P en φ

par
$$P(\varphi) = a_0 \underbrace{\varphi^0}_{1_A} + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \dots + a_d \varphi^d$$
$$\in A$$

PROPOSITION 11.4. L'application ev_φ est un morphisme de K -algebres:

$$\text{ev}_\varphi(\lambda.P + Q) = \lambda P(\varphi) + Q(\varphi) = \lambda.\text{ev}_\varphi(P) + \text{ev}_\varphi(Q)$$

$$\text{ev}_\varphi(P.Q) = P(\varphi).Q(\varphi) = \text{ev}_\varphi(P).\text{ev}_\varphi(Q).$$

Son image $\text{ev}_\varphi(K[X])$ est notée

$$K[\varphi] = \{a_n.\varphi^n + a_{n-1}.\varphi^{n-1} + \dots + a_0.1_A, n \geq 1, a_0, \dots, a_n \in K\} \subset A$$

est une sous-algre commutative de A engendree comme K -ev par les puissance de φ :

$$\{1_A = \varphi^0, \varphi, \dots, \varphi^n, \dots\}.$$

$$\text{ev}_\varphi: P \in K[X] \longrightarrow P(\varphi) \in A$$

$$(\lambda P + Q)(\varphi) = \lambda P(\varphi) + Q(\varphi)$$

$$(PQ)(\varphi) = P(\varphi)Q(\varphi)$$

$$\dim_K(A) = D < \infty \quad \left(\begin{array}{l} A = M_d(K) \quad \dim = d^2 \\ A = \text{End}(V) \quad \dim = (\dim V)^2 \end{array} \right)$$

Soit $K[x]_{\leq D}$ l'espace des polynômes de
 $\deg \leq D = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_D x^D \}$

et de $\dim D+1$

du coup l'application lineaire

$$\text{ev}_\phi: K[x]_{\leq D} \rightarrow A$$

a un noyau $\neq \{0\}$ (par le Thm NI)

$$\dim K[X] \xrightarrow{\leq D} = \dim \ker \text{ev}_\varphi + \dim \text{Im} \varphi$$

$$= D+1 = \dim \ker \text{ev}_\varphi + (\leq \underset{D}{\dim A})$$

$$\dim \ker \text{ev}_\varphi \geq 1$$

il existe P de $d^0 \leq D$ $P \neq 0$ tq

$$P(\varphi) = 0_A.$$

Par exemple si $M \in M_d(K)$ il existe

$$P \neq 0 \text{ de } d^0 \leq d^2 + 1 \text{ tq}$$

$$M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \dots + a_1M + a_0Id = O_{d \times d}$$

$$k \leq d^2 + 1.$$

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} \partial & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I \quad \text{or} \quad I^2 + Id_2 = O_{2 \times 2}$$

THÉORÈME 11.6 (Cayley-Hamilton). Soit $\varphi \in \text{End}(V)$ (resp. $M \in M_d(K)$) alors son polynôme caractéristique $P_{\text{car},\varphi}(X)$ (resp. $P_{\text{car},M}(X)$) appartient à $\ker \text{ev}_\varphi$ (resp. $\ker \text{ev}_M$); en d'autres termes

$$P_{\text{car},\varphi}(\varphi) = \underline{0}_V, \quad P_{\text{car},M}(M) = \mathbf{0}_{d \times d}.$$

Rmq: $\deg P_{\text{car},M} = d < d^2$

Preuve: $\varphi: V \rightarrow V$ soit v un vecteur $\neq 0$

soit $V_1 = \text{Vect}(v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^k(v), \dots)$
 $k \geq 1$

$\dim V_1 \leq \dim V$ et V_1 possède une
 $= d_1$

base de la forme

$$B_1 = \{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d_1-1}(v)\}$$

alors compléter cette base en une base
de V $B = B_1 \cup B_2$

et par définition de V_1 , on a que
 $\varphi(V_1) \subseteq V_1$

$$\text{Mat}_{B_1 \cup B_2}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & \text{---} \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{\text{Coe}, \varphi}(X) &= \text{Pol}_{\text{Coe}, M_1}(X) \text{Pol}_{\text{Coe}, M_2}(X) \\ &= \text{Pol}_{\text{Coe}, M_2}(X) \text{Pol}_{\text{Coe}, M_1}(X) \end{aligned}$$

la matrice M_1 et une matrice compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -u_0 \\ 1 & 0 & & -u_1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1-u_d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi: v &\rightarrow \varphi(v) \\ \varphi(v) &\rightarrow \varphi^2(v) \\ &\vdots \\ \varphi^{d-1}(v) &= \varphi^d(v) \end{aligned}$$

et on connaît son
pol caractéristique

et on montre que pour celui-ci

$$\text{Pol}_{\text{Car}, M_1}(\varphi|_{V_1}) = 0$$

et alors

$$\begin{aligned} \text{Pol}_{\text{Car}, M}(\varphi) &= \text{Pol}_{\text{Car}, M_2}(\varphi) \text{Pol}_{\text{Car}, M_1}(\varphi) \\ &= \text{Pol}_{\text{Car}, M_2}(\varphi) 0_V = 0_V. \end{aligned}$$

□

Determinant en $C_{\text{ar}}=2$

DÉFINITION 10.9. Soit V un K -EV de dimension $d \geq 1$. Une forme multilinéaire

$$\Lambda : (v_1, \dots, v_n) \in V^n \rightarrow \Lambda(v_1, \dots, v_n) \in K$$

est alternée si pour tout $1 \leq i < j \leq n$, et tout $(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n) \in V^{n-1}$ on a

$$\Lambda : (v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0.$$

Rmq

THÉORÈME 10.15. Soit K un corps (quelconque) et V un K -EV de dimension $d \geq 1$ alors

$$\dim \text{Alt}^{(d)}(V; K) = 1$$

et une base de $\text{Alt}^{(d)}(V; K)$ est donnée par la forme

$$\det = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \text{sign}(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(1)}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(d)}^*$$

qui est alternée et non-nulle.

Preuve (de l'alternance)